

## 2.18 ಬೈಜಿಕ ಕರಣಿಗಳು:

ನಾವೀಗಾಗಲೇ ಪಾಠ 1.7 ರಲ್ಲಿ ಕರಣಿಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸುವುದನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕರಣಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯಲಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಾದ  $(x, a, b, n.)$  ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಕರಣಿ:  $\sqrt[n]{m}$  ಇದರಲ್ಲಿ  $m$  ಕರಣಿಕ್ರಮ  $n$  ಕರಣೀಯ.

**ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:** ಸುಲಭರೂಪದಲ್ಲಿ, ಕರಣಿಗಳು ಒಂದೇ ಕ್ರಮ ಮತ್ತು ಸಮ ಕರಣೀಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳು 'ಸಮರೂಪ' ಕರಣಿಗಳು. ಸುಲಭರೂಪದಲ್ಲಿ ಕರಣೀಯ ಕ್ರಮಗಳು **ಅಥವಾ** ಕರಣೀಯಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಗಿದ್ದರೆ. ಅವುಗಳನ್ನು 'ಅಸಮ ರೂಪ' ಕರಣಿಗಳೆನ್ನುವರು.

ಉದಾ: ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

1.  $\sqrt{48} = \sqrt{16*3} = \sqrt{16} * \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
2.  $\sqrt{12} = \sqrt{4*3} = \sqrt{4} * \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ನಾವು ಮೇಲಿನ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತಾರದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಅಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳೆನ್ನಬೇಕಿತ್ತು. ಏಕೆಂದರೆ ಅವುಗಳ ಕರಣಿಕ್ರಮ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೂ, ಕರಣೀಯಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ (48, 12). ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಕರಣಿಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುವ ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬೇಕು. ಸುಲಭ ರೂಪದಿಂದಾಗಿ, ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಕರಣಿಗಳು ಸಮರೂಪಕರಣಿಗಳು. ಅವುಗಳ ಕರಣಿ ಕ್ರಮ 2, ಕರಣೀಯ 3.

$$3. \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27*2} = 3\sqrt[3]{2} \rightarrow (\text{ಕರಣಿಕ್ರಮ} = 3, \text{ಕರಣೀಯ} = 2)$$

$$4. \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{16*5} = 2\sqrt[4]{5} \rightarrow (\text{ಕರಣಿಕ್ರಮ} = 4, \text{ಕರಣೀಯ} = 5)$$

ಈ ಎರಡು ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಕರಣಿಕ್ರಮ/ಕರಣೀಯಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳು ಅಸಮರೂಪಕರಣಿಗಳು.

ಕೆಳಗಿನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

$$1. 5a+3a = (5+3)a = 8a$$

$$2. 7a-2a = (7-2)a = 5a$$

ನಾವು ಕರಣಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

1. ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಹಗುಣಕಗಳ(ಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಾಗ) ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಿ, ಕರಣಿಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$2.18 \text{ ಸಮಸ್ಯೆ 1: ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ: } 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x}$$

ಪರಿಹಾರ:

$$2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x} = (2+3)\sqrt[3]{x} = 5\sqrt[3]{x}$$

$$2.18 \text{ ಸಮಸ್ಯೆ 2. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ: } 3x\sqrt{x} + 4\sqrt{x*x*x} - \sqrt{25x*x*x}$$

ಪರಿಹಾರ:

$$\begin{aligned} & 3x\sqrt{x} + 4\sqrt{x*x*x} - \sqrt{25x*x*x} \\ & = 3x\sqrt{x} + 4x\sqrt{x} - 5x\sqrt{x} = (3x+4x-5x)\sqrt{x} = 2x\sqrt{x} = 2x^{(1+1/2)} \\ & = 2x^{3/2} \end{aligned}$$

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 3.**  $5\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[4]{b}$  ನ್ನು  $8\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[4]{b}$  ಯಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**  $(8\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[4]{b}) - (5\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[4]{b})$

$$= (8-5)\sqrt[3]{a} + (5-3)\sqrt[4]{b}$$

$$= 3\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[4]{b}$$

**ಗಮನಿಸಿ:**

$$\sqrt{6} * \sqrt{3} = \sqrt{6*3} = \sqrt{18} = \sqrt{9*2} = 3\sqrt{2}$$

2.  $(ab)^n = a^n * b^n$  ನಿಯಮದಂತೆಯೇ,  $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 4.**  $\sqrt{5}$  ನ್ನು  $\sqrt[4]{3}$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

$$\sqrt{5} = 5^{1/2} = 5^{2/4} = (5^2)^{1/4} = (25)^{1/4}$$

$$\therefore \sqrt{5} * \sqrt[4]{3} = (25)^{1/4} * 3^{1/4} = 75^{1/4} = \sqrt[4]{75}$$

ನಾವಿಲ್ಲಿ ಏನು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ?

**ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವಾಗ ಅನುಸರಿಸುವ ಹಂತಗಳು:**

ಹಂತ 1 : ಕರಣಿಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 2 : ಕರಣಿಕ್ರಮಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 3 : ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಕರಣಿಕ್ರಮ (ಹಂತ 2 ರಂತೆ) ಬರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ

ಹಂತ 4 :  $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, ಕರಣೀಯಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ.

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 5.**  $\sqrt[3]{3}$  ನ್ನು  $\sqrt[4]{2}$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.  $\sqrt[12]{81} * \sqrt[12]{8} = \sqrt[12]{81*8} = \sqrt[12]{648}$

**ಪರಿಹಾರ:**

ಸಂ.	ಹಂತ	ವಿವರಣೆ
1	$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}, \sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$	ಕರಣಿಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.
2	ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಕರಣಿಕ್ರಮಗಳು 3 ಮತ್ತು 4. ಇವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ = 12	ಕರಣಿಕ್ರಮಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3	$\sqrt[3]{3} = 3^{1/3} = 3^{4/12} = (3^4)^{1/12} = (81)^{1/12}$	ಕರಣಿಗಳ ಘಾತಾಂಶವನ್ನು $(\frac{1}{12})$ ಬದಲಾಯಿಸಿ
4	$\sqrt[4]{2} = 2^{1/4} = 2^{3/12} = 2^{3/12} = (2^3)^{1/12} = (8)^{1/12}$	ಕರಣಿಗಳ ಘಾತಾಂಶವನ್ನು $(\frac{1}{12})$ ಬದಲಾಯಿಸಿ
5	$(\sqrt[3]{3}) * (\sqrt[4]{2}) = \sqrt[12]{81} * \sqrt[12]{8} = \sqrt[12]{81*8} = \sqrt[12]{648}$	

$\sqrt{5}$  ಇದು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

$\sqrt{5}$  ನ್ನು  $\sqrt{5}$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸುವಾ.

$\sqrt{5} * \sqrt{5} = \sqrt{5*5} = \sqrt{25} = 5$ . 5 ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

**ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:** ಒಂದು ಕರಣಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಕರಣಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಕರಣಿಗಳ 'ಅಕರಣೀಕರಣ' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಆಗ ಆ ಕರಣಿಯು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರಣಿಗೆ 'ಅಕರಣೀಕಾರಕ' ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ  $\sqrt{5}$  ಎಂಬುದು  $\sqrt{5}$ ರ ಅಕರಣೀಕಾರಕ.

**2.18ಸಮಸ್ಯೆ 6:**  $6\sqrt[3]{a-b}$  ಇದರ ಅಕರಣೀಕಾರಕ ಯಾವುದು?

**ಪರಿಹಾರ:**

ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ  $\sqrt[3]{a-b}$  ಮಾತ್ರ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಭಾಗ. 6 ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೀಗ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು  $\sqrt[3]{a-b}$ ಯ ಅಕರಣೀಕಾರಕ

$\sqrt[3]{a-b}$ ಯ ಅಕರಣೀಕಾರಕ:  $\sqrt[3]{(a-b)*(a-b)}$  ಏಕೆಂದರೆ,

$$\therefore \sqrt[3]{a-b} * \sqrt[3]{(a-b)*(a-b)} = \sqrt[3]{(a-b)*(a-b)*(a-b)} = (a-b)$$

ಈಗ,  $6\sqrt[3]{a-b}$ ಯನ್ನು  $\sqrt[3]{(a-b)*(a-b)}$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.

ಫಲಿತಾಂಶ:

$$\begin{aligned} & 6(a-b)^{1/3} * ((a-b)^2)^{1/3} \\ & = 6(a-b)^{1/3} * (a-b)^{2/3} \\ & = 6(a-b)^{(1+2)/3} = 6(a-b) \text{ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.} \end{aligned}$$

**ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:** ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಅಥವಾ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದು ಕರಣಿ, ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ (ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ) ವನ್ನು **ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿ** ಎನ್ನುವರು.

ಉದಾ:  $6\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ,  $6\sqrt{x} - 2\sqrt{a}$ ,  $2 + \sqrt{11}$

ಒಂದು ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದರೆ. ಒಂದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರ '**ಸಂಯುಗ್ಮಿ(ಅಕರಣೀಕಾರಕ)**' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿ \* ಸಂಯುಗ್ಮಿ = ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 7 :**  $4\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ ಯ ಸಂಯುಗ್ಮಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿ.

**ಪರಿಹಾರ:**

$$4\sqrt{x}-2\sqrt{y} = 2(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

ಈಗ,  $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$  ಸೂತ್ರ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ  $2\sqrt{x}+\sqrt{y}$  ಯು ದತ್ತ ಕರಣಿಯ ಸಂಯುಗ್ಮಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

$$(4\sqrt{x}-2\sqrt{y})(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$= 2(2\sqrt{x}-\sqrt{y})(2\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$= 2\{(2\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2\}$$

$$= 2\{2^2*(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2\}$$

$$= 2(4x-y) = 8x-2y \rightarrow \text{ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ.}$$

ಕರಣಿಯು ಭಿನ್ನರಾಶಿರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಣಗೊಳಿಸಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ:

- 1) ಛೇದದ ಅಕರಣೀಕಾರಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.
- 2) ಛೇದದ ಅಕರಣೀಕಾರಕವನ್ನು ದತ್ತ ಕರಣಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 8:** ಭೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:  $2 \div (\sqrt{x} - \sqrt{y})$

**ಪರಿಹಾರ:**

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) * (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = (x - y) \quad (\because (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \text{ ಇಲ್ಲಿ } a = \sqrt{x} \text{ } b = \sqrt{y})$$

$\sqrt{x} + \sqrt{y}$  ಇದು ಭೇದದ ಅಕರಣೀಕಾರಕ(ಸಂಯುಗ್ಮ). ಇದರಿಂದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಭೇದಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಗುಣಿಸುವಾ.

$$\therefore 2 \div (\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$= \left\{ \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right\} * \left\{ \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right\}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 9:** ಭೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:  $(5\sqrt{3} + \sqrt{2}) \div (3\sqrt{2} - \sqrt{5})$

**ಪರಿಹಾರ:**

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆಯೇ  $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$  ರ ಅಕರಣೀಕಾರಕ  $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$

$$\therefore (5\sqrt{3} + \sqrt{2}) \div (3\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$= \left\{ \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{5}} \right\} * \left\{ \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3\sqrt{2} + \sqrt{5}} \right\}$$

$$= \frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{2}) * (3\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(9*2 - 5)}$$

$$(\because (3\sqrt{2})^2 = 9*2 \text{ ಮತ್ತು } (\sqrt{5})^2 = 5)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}(3\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{2} * (3\sqrt{2} + \sqrt{5})}{13}$$

$$= \frac{5*3\sqrt{3*2} + 5\sqrt{3*5} + 3\sqrt{2*2} * \sqrt{2*5}}{13} = \left( \frac{15\sqrt{6} + 5\sqrt{15} + 6 + \sqrt{10}}{13} \right)$$

**2.18 ಸಮಸ್ಯೆ 10 :** ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸಿ ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ:  $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

**ಪರಿಹಾರ:**

ಇಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಅಕರಣೀಕರಿಸುವಾ.

1. ಮೊದಲ ಪದದ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು  $\sqrt{10}-\sqrt{3}$ ರ ಸಂಯುಗ್ಮಿಯಾದ  $\sqrt{10}+\sqrt{3}$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ.

$$\begin{aligned}(\sqrt{10}+\sqrt{3}) * (\sqrt{10}-\sqrt{3}) &= 10-3 = 7 \\ \therefore \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}} &= \frac{(7\sqrt{3}) * (\sqrt{10}+\sqrt{3})}{(\sqrt{10}-\sqrt{3}) * (\sqrt{10}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{7(\sqrt{30}+3)}{7} \quad (\because \sqrt{3} * \sqrt{3} = 3) \\ &= 3 + \sqrt{30}\end{aligned}$$

2. ಀಗ ಎರಡನೇ ಪದವನ್ನು ಅಕರಣೀಕರಿಸುವಾ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡನ್ನು  $\sqrt{6}+\sqrt{2}$  ರ ಸಂಯುಗ್ಮಿಯಾದ  $\sqrt{6}-\sqrt{2}$  ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ

$$\begin{aligned}\therefore \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{5} * (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) * (\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{30}-\sqrt{10})}{4} = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}}{2} \\ \therefore \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} & \\ &= (3 + \sqrt{30}) - \frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}}{2} \\ &= \frac{6+2\sqrt{30}-\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2} \\ &= \frac{6+\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}\end{aligned}$$